*שיעור שני*

**המשך תורת הטורים – טורי מספרים**

Comvergems Shesaro – הגדיר התכנסות מסוג אחר, שנקראת התכנסות לפי צזארו.

משיעור קודם:

אם קיים אז נאמר שהטור מתכנס.

אם טור מתכנס אז האיבר הכללי שואף ל-0. אם טור מתבדר אז האיבר הכללי שואף למספר שונה מ-0.

**טור הרמוני:**

טור הרמוני הוא טור מתבדר, ולא מתכנס, ניתן להוכיח התבדרות של טור בצורה הבאה:

דרכים להוכיח אם הטור הרמוני מתבדר – מבחן האינטגרל, וקריטיריון קושי לסדרות (להוכיח כאשר ).

**דוגמאות:**

1. נתון הטור הבא:
2. *נתון האיבר הכללי הבא:*

*נחקור:*

*מתכנס*

*נחשב:*

*ולכן הטור מתכנס לפי מבחן השוואה 2.*

1. *נתון הטור:*

*מתבדר (טור הרמוני)*

*ולכן מתבדר לפי מבחן השוואה 2.*

*נתון הטור:*

*כאשר נראה חזקה נעשה את מבחן השורש:*

*ולכן הטור מתכנס לפי מבחן השורש.*

1. *נתון הטור:*

*ולכן מתבדר לפי מבחן השורש.*

**מבחן האינטגרל:**

*אם פונקציה מונוטונית, חיובית (יורדת) לכל אז טור , כאשר ,*

*אזי ההתכנסות של הטור או ההתבדרות של הטור תלויה באינטגל*

***לדוגמא:***

*נתון הטור:*

*פונקציה פורמלית – פונקציה שמחליפה את האיבר הכללי (כל טור ניתן לכתוב בצורה אינטגרלית ולהפך). הפונקציה שמחליפה את האיבר הכללי של הטור הנ"ל תראה כך:*

*ולכן מתבדר לפי מבחן האינטגל.*

**טור עם סימנים מתחלפים:**

*נתון הטור:*

*כאשר הסימנים מתחלפים ולא קבועים משתמשים במבחן לייבניץ.*

**כלל לייבניץ:**

*לפי לייבניץ אם מתקיימים שני תנאים האלה (רק על טורים עם סימנים מתחלפים):*

1. *(ערך האיברים יורד, כלומר כל איבר הבא קטן מקודמו)*

*מכאן נובע שטור מתכנס.*

***דוגמאות:***

1. *נתון הטור:*

*ניתן לראות שמתקיים:*

*נחשב את הגבול של האיבר הכללי:*

*ולכן לפי מבחן לייבניץ הטור מתכנס.*

1. *נתון הטור:*

*נבדוק לפי מבחן לייבניץ.*

*תנאי א':*

*תנאי ב':*

*מכיוון שהגבול שונה מאפס הטור מתבדר.*

* *כלומר לפי מבחן לייבניץ בטורים עם סימנים מתחלפים, אם האיבר הכללי שואף למספר שונה מאפס אזי הטור מתבדר.*

**התכנסות בהחלט – Absolute convergence:**

*(מתיחס גם לטורים מתחלפים)*

*נתון הטור (עם סימנים מתחלפים ללא חוקיות מסוימת):*

*נרכיב את אותו טור רק עם ערכים מוחלטים:*

* *ברגע שלקחנו את הטור והרכבנו טור חדש עם ערכים מחלטים של האיברים אז אין יותר איברים שליליים, והסימנים נייהיו רק חיוביים.*

***הגדרה:***

*אם הטור השני (עם הערכים המוחלטים) מתכנס אזי אומרים שהטור הראשון מתכנס בהחלט.*

*המטרה שלנו היא לחקור את הטור הראשון אבל נעשה זאת בעזרת הטור השני עם הערכים המוחלטים.*

*ההבדל בין המושגים הכנסות רגילה להתכנסות בהחלט:*

*התכנסות רגילה היא התכנסות רק של איברים חיוביים, התכנסות בהחלט מתיחסת להתכנסות רק של איברים מתחלפים.*

***דוגמא:***

*נתון הטור:*

*נחקור את הטור.*

*כיוון שהסימנים מתחלפים ללא חוקיות נשתמש ננסה לבדוק אם הוא מתכנס בהחלט, נבנה את הטור עם ערכים מוחלטים:*

*נשים לב כי טור הוא הנדסי, ולכן מתכנס.*

*ולכן הטור עם הסימנים המתחלפים הוא מתכנס בהחלט.*

**התכנסות על תנאי:**

***הגדרה:***

*לטור (גם עם סימנים מתחלפים) קוראים מתכנס על תנאי אם מתבדר.*